

# СТРУКТУРА ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ В ВОЛНОВОДЕ ПЕКЕРИСА С УЧЕТОМ ДИСЛОКАЦИЙ

**Б.А. Касаткин, Н.В. Злобина, С.Б. Касаткин**

Вихревые поля являются наиболее сложными и наименее изученными объектами в акустике слоистых сред. Они заметно усложняют структуру звукового поля из-за появления в нём узловых и седловых точек, в окрестности которых понятие фазы звуковой волны становится неопределённым. Поэтому такие особые точки звукового поля принято называть дислокациям фазового фронта. В свою очередь, дислокационная структура вихревого поля оказывается наиболее сложной в волноводах, которые играют исключительно важную роль в теоретической и прикладной гидроакустике. В настоящей работе вихревая структура звукового поля и соответствующая ей дислокационная структура вихревого поля анализируются на примере волновода Пекериса, звуковое поле в котором построено в рамках несамосопряжённой модельной постановки соответствующей граничной задачи.

**Ключевые слова:** несамосопряжённая модельная постановка, обобщённое решение, ротор вектора интенсивности, узловые и седловые точки, «обратные» потоки мощности, комбинационные волны.

## Введение

Теоретическая акустика и гидроакустика, в частности, достигли значительных успехов в описании звуковых полей, формируемых в слоистых волноводах различной степени сложности, простейшим из которых является модельный волновод Пекериса. Как правило, предметами детальных исследований являются дискретный (модовый) характер звукового поля и соответственно интерференция нормальных волн, которые формируют звуковое поле; дисперсия нормальных волн и соответственно дисперсионные искажения широкополосного сигнала при его распространении в волноводе; неоднородность и нерегулярность волновода и соответственно вертикальная и горизонтальная рефракция лучей в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Однако можно с уверенностью сказать, что наименее изученными являются вихревые поля, которые составляют неотъемлемую часть звукового поля в волноводе. Примером таких полей является вихревая составляющая вектора плотности потока мощности (вектора интенсивности) в волноводе, который является сложным вектором, содержащим потенциальную и вихревую составляющие, и чисто вихревой вектор – ротор вектора интенсивности. Вихревая составля-

ющая вектора интенсивности появляется в случае, если звуковое поле формируется либо набором точечных источников в свободном пространстве [1, 2], либо точечным источником в волноводе. Именно эти локальные вихри в окрестности сопряжённой пары седло – узел, как представляющие наибольший интерес, были рассмотрены в основополагающих работах [3–6], как правило, в рамках двухмодовой интерференции и при классическом решении граничной задачи Пекериса в самосопряжённой модельной постановке (Л.М. Бреховских). Однако вихревые поля вовсе не сводятся к таким локальным структурам. Кроме того, вихревые поля в волноводе, вычисленные в различных модельных постановках граничной задачи, самосопряжённой или несамосопряжённой, отличаются принципиально. Различие между самими модельными постановками, самосопряжённой и несамосопряжённой, и между соответствующими им решениями граничной задачи Пекериса, классическим и обобщённым, обсуждалось нами достаточно подробно в работе [7]. В классическом решении вихревые поля зарождаются в результате интерференции нормальных волн, захваченных волноводом. В то же время на частотах, которые меньше первой критической частоты волновода, звуковое поле описывается составляющими сплошного спектра. При этом звуко-

вое поле носит вырожденный характер, а вихревые поля в этом диапазоне частот отсутствуют.

В обобщённом модельном решении граничной задачи, соответствующем несамосопряжённой модельной постановке, звуковое поле описывается собственными функциями двух сопряжённых операторов, которым соответствуют расходящиеся (прямые) и сходящиеся (обратные) волны отдачи, а все нормальные волны объединены в сопряжённые пары. В области комплексных значений горизонтального волнового числа формируются вытекающие комбинационные волны (КВ) с волновыми числами  $(\xi, -\xi^*)$ , одновременно удовлетворяющие условию погашаемости на бесконечности (по горизонтальной координате). Сама комбинационная волна в этом случае представляет собой стоячую волну, амплитуда которой убывает при удалении от источника. В области вещественных значений горизонтального волнового числа нормальные волны также объединены в сопряжённые пары, формирующие комбинационные волны с вещественными волновыми числами. Вытекающие комбинационные волны трансформируются в комбинационные волны вещественного спектра на частотах продольного резонанса, являющихся кратными корнями дисперсионного уравнения. Реактивный входной импеданс волновода в этом случае равен нулю. Амплитуда звукового давления на частоте продольного резонанса имеет корневую особенность и аномальную зависимость от расстояния (в идеальном резонаторе без потерь):

$$p(\omega) = O((\delta\omega)^{-1/2}), \delta\omega = |\omega - \omega_p|, p(r) = O(r^{1/2}), \omega_p -$$

частота продольного резонанса [8].

Разделение резонансов на продольные и поперечные является характерным для твёрдых волноводов типа стержней, пластин, цилиндров со свободной поверхностью. При этом несамосопряжённость операторов, которые описывают граничную задачу, связана с взаимной трансформацией продольных и поперечных волн как составляющих совместного волнового движения при их отражении от свободной поверхности. На частотах поперечного резонанса зарождаются квазипоперечные волны, в составе которых доминирует поперечная составляющая волнового движения. На частотах продольного резонанса зарождаются парами квазипродольные волны, в составе которых преобладает продольная составляющая волнового движения [9]. Фундаментальность явления продольного резонанса состоит в том, что он возникает в волноводной системе, размер которой не ограничен в направлении установления режима резонансных колебаний. В реализации продольного резо-

нанса обязательно участвуют волны с разными знаками фазовой и групповой скоростей. В суммарное решение включается волна с положительно определённой групповой скоростью, а не фазовой, как этого требуют, например, условия излучения по Зоммерфельду, сформулированные для условий свободного пространства.

Для волновода Пекериса разделение резонансов на продольные и поперечные также связано с тем, что оператор, описывающий граничную задачу, является несамосопряжённым, а собственные функции двух сопряжённых операторов, связанные взаимной трансформацией, это расходящиеся (прямые) и сходящиеся (обратные) волны отдачи. Пара сопряжённых нормальных волн всегда образует комбинационную волну, которая является единицей волнового движения в волноводе. Возбуждение продольных резонансов в слабо нерегулярном волноводе типа берегового клина впервые было описано в работе [10] и получило объяснение в работе [11] в рамках обобщённого решения. Описание экспериментальных исследований резонансных явлений в мелком море в инфразвуковом диапазоне частот приведено в работах [12, 13]. Важная особенность звуковых полей в окрестности частот продольного резонанса заключается в особой структуре вихревых полей, которые не имеют аналогов в классическом решении.

## 2. Моделирование вихревых полей в волноводе Пекериса

В звуковом поле, сформированном в условиях свободного пространства одиночным источником, вектор интенсивности является потенциальным вектором. Однако в звуковом поле, сформированном в волноводе, вектор интенсивности становится сложным вектором, содержащим потенциальную и вихревую составляющие, которые не разделяются в суммарном звуковом поле. Вместе с тем под чисто вихревым вектором будем понимать ротор вектора интенсивности, который представлен в модельном двумерном волноводе только угловой компонентой. Полное описание вихревого поля и первое экспериментальное подтверждение существования вихревых структур в звуковом поле получено в работах [12–19]. С физической точки зрения причиной образования вихревых структур в волноводе является интерференция нормальных волн, формирующих звуковое поле в волноводе. В результате интерференции поле в сечении волновода приобретает характер стоячей волны, а горизонтальный поток мощности модулируется стоячими волнами, период которых опреде-

ляется разностными пространственными частотами нормальных волн, формирующих суммарное звуковое поле. В случае обобщённого решения граничной задачи единицей волнового движения является комбинационная волна, а потому анализ вихревых структур проще выполнить с использованием КВ вещественного спектра, структура которых (в потенциалах) описывается следующим выражением:

$$\frac{\varphi_{nm}(r, z)}{\varphi_0} = a_n \varphi_n(r, z) + b_m \varphi_m(r, z), \quad (1)$$

$$\varphi_n(r, z) = \frac{\varphi_n(z_0)\varphi_n(z)}{E_n} H_0^{(2)}(\xi_n r), \quad \varphi_0 = -i \frac{2\pi}{h}, \quad z \in (0, h).$$

$$E_n = 1 - \frac{\sin(2k_{31,n}h)}{2k_{31,n}h} + \rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,n}h)}{\alpha_{2,n}h}, \quad k_{31}^2 = k_1^2 - \xi^2,$$

$$E_m = 1 - \frac{\sin(2k_{31,m}h)}{2k_{31,m}h} - \rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,m}h)}{\alpha_{2,m}h}, \quad \alpha_2^2 = \xi^2 - k_2^2,$$

$$\varphi_n(z) = \sin(k_{31,n}z), \quad a_n = \frac{E_n}{E_n + E_m}, \quad b_m = \frac{E_m}{E_n + E_m},$$

$$a_n + b_m = 1, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \bar{v} = -\text{grad} \phi = \bar{v}_1 + i\bar{v}_2 = |v| e^{i\psi},$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \omega \rho_1 \text{Im}(\bar{v} \times \bar{v}^*),$$

$$H_\psi = \omega \rho_1 (v_{1z} v_{2r} - v_{2z} v_{1r}) = \omega \rho_1 |v_r| |v_z| \sin(\psi_z - \psi_r).$$

$\varphi_n(r, z), \varphi_m(r, z)$  – регулярная и обобщённая составляющие комбинационной волны,  $k_{31}^2 = k_1^2 - \xi^2$ ,  $\alpha_2^2 = \xi^2 - k_2^2$ ,  $\xi$  – горизонтальное волновое число,  $k_1, k_2$  – волновые числа в волноводе и полупространстве,  $\rho_1, \rho_2$  – плотность среды в волноводе и полупространстве соответственно,  $z_0$  – горизонт источника,  $h$  – глубина волновода,  $z_{01} = \frac{z_0}{h}$ ,  $r_1 = \frac{r}{h}$ .

На рис. 1 представлены для сравнения пространственные структуры поля угловой компоненты ротора вектора интенсивности и поля квадрата звукового давления (с исключённой цилиндрической расходимостью) для первой, второй и третьей комбинационных волн. Значение частотного параметра равно  $k_1 h = 20$  и соответствует трехмодовому режиму, источник расположен вблизи поверхности. Отметим характерные особенности пространственных структур для сравниваемых звуковых полей. Во всех комбинационных волнах размер вихревых структур

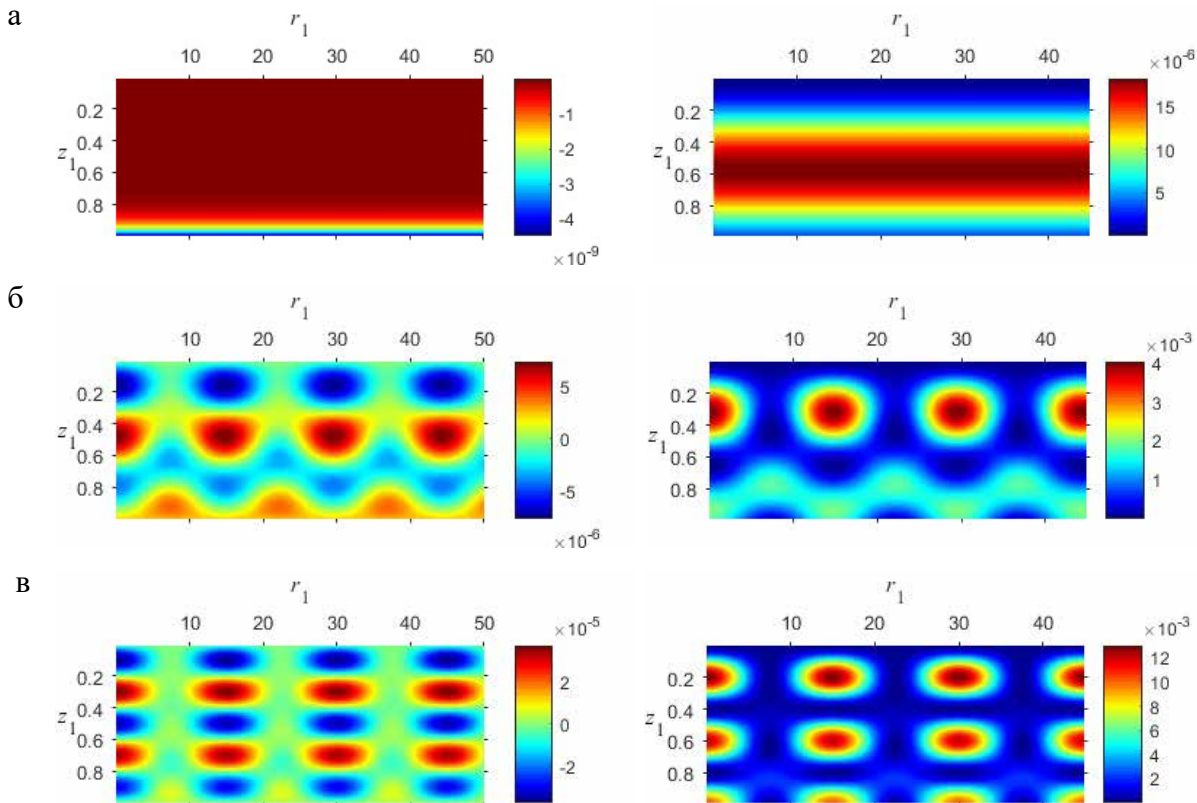


Рис. 1. Поле угловой компоненты  $H_\psi$  (левый столбец) и квадрата звукового давления  $p^2$  (правый столбец),  $k_1 h = 20$ ,  $z_{01} = 0,01$ : а – первая КВ; б – вторая КВ; в – третья КВ

определяется периодом интерференции сопряжённых волн. В первой комбинационной волне основной вклад вносит регулярная составляющая. Поэтому размер вихревой зоны в горизонтальном направлении не ограничен, а размер вихря в вертикальном направлении равен четверти длины волны (для вертикального волнового числа). В вихревом поле второй комбинационной волны образуются цепочки, ориентированные горизонтально, в которых сохраняется направление вращения вихрей. В вертикальном направлении, т.е. в направлении формирования стоячей волны, направление вращения вихрей изменяется, а на глубине волновода формируются три вихря размером в четверть длины волны каждый.

Для третьей комбинационной волны вихревые цепочки сохраняют горизонтальную ориентацию, а на глубине волновода формируются пять вихрей размером в четверть длины волны каждый. В пространстве между соседними горизонтально ориентированными вихревыми цепочками с противоположным направлением вращения вихрей формируется горизонтальный поток мощности. В случае, если этот поток мощности оказывается однонаправленным с потоком мощности в потенциальной составляющей вектора интенсивности, в суммарном поле звукового давления формируются локальные максимумы, горизонтальные координаты которых хорошо соответствуют положению максимумов вихрей. В случае, если этот поток мощности оказывается встречным с потоком мощности в потенциальной составляющей вектора интенсивности, в суммарном поле звукового давления формируются локальные минимумы, горизонтальные координаты которых хорошо соответствуют положению максимумов вихрей. Пространственный период вихревых структур в горизонтальном направлении определяется разностной пространственной частотой интерферирующих волн.

Лучевая трактовка формирования комбинационных волн показана на рис. 2. Регулярная составляющая комбинационной волны при отражении от

импедансной границы сдвигается в направлении распространения, тогда как обобщённая составляющая КВ сдвигается в обратном направлении. Аналогичное отражение со встречным сдвигом происходит и на верхней границе волновода. В результате формируется устойчивая угловая структура комбинационной волны при её распространении в волноводе, обеспечивающая именно цилиндрическую расходимость потока мощности в комбинационной волне. Само отражение со встречным сдвигом, соответствующее двузначности коэффициента отражения при углах падения, больших критического значения, можно рассматривать как механизм компенсации разности фаз между волновыми составляющими комбинационной волны. Этот механизм приводит к формированию интерференционных максимумов звукового давления и одновременному зарождению вихрей в одних и тех же сечениях волновода. Пространственная структура поля звукового давления и вихревого поля, представленная на рис. 1, хорошо соответствует такому объяснению.

### 3. Моделирование мелкомасштабных вихревых полей

Вытекающие волны комплексного спектра были включены в суммарное решение граничной задачи, предложенное в фундаментальной работе Пекериса [20]. Однако его решение получилось некорректным при описании звукового поля в полупространстве, где амплитуда вытекающих волн экспоненциально увеличивается с глубиной. Несамосопряжённая модельная постановка граничной задачи позволяет получить корректное решение во всей области определения решения, но с использованием собственных функций двух сопряжённых операторов с волновыми числами  $(\xi, -\xi^*)$ , образующих вытекающие комбинационные волны, и механизма их взаимной трансформации. Структура вытекающих комбинационных волн описывается выражением:

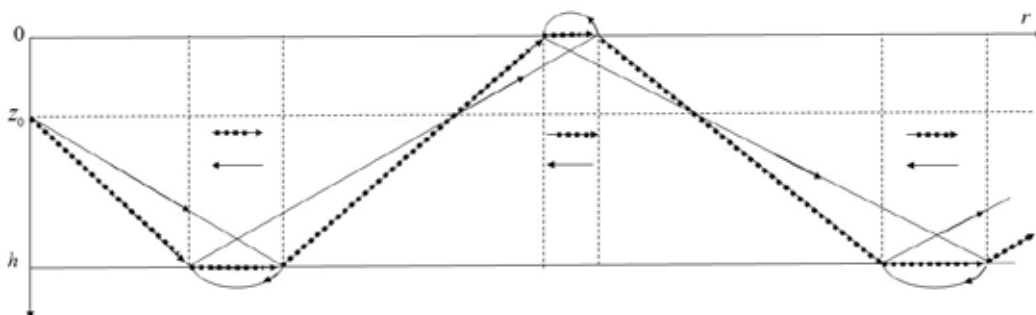


Рис. 2. Лучевая трактовка формирования комбинационных волн в волноводе



$$\frac{\varphi_n(r, z)}{\varphi_0} = a_n \frac{\varphi_n(z_0)\varphi_n(z)}{E_n} H_0^{(2)}(\xi_n r) + b_n \frac{\varphi_n^*(z_0)\varphi_n^*(z)}{E_n^*} H_0^{(2)}(-\xi_n^* r), \quad (2)$$

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{h}, \quad E_n = 1 - \frac{\sin(2k_{31,n}h)}{2k_{31,n}h} - i\rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,n}h)}{k_{32,n}h},$$

$$a_n + b_n = 1.$$

В представлении  $E_n = I_n + iQ_n$  весовые коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  определяются формулами энергетического взвешивания аналогично тому, как это было сделано для КВ вещественного спектра, содержащих регулярную и обобщённую составляющие:

$$a_n = \frac{|I_n| + |Q_n|}{2|I_n|}, \quad b_n = \frac{|I_n| - |Q_n|}{2|I_n|}, \quad a_n - b_n = \left| \frac{Q_n}{I_n} \right|,$$

$$F_n(r, z) = \frac{\varphi_n(z_0)\varphi_n(z)}{E_n} H_0^{(2)}(\xi_n r). \quad (3)$$

Перепишем (2) с учётом (3) в виде:

$$\frac{\varphi_n(r, z)}{\varphi_0} = \text{Re}[F_n(r, z)] + i \frac{Q_n}{I_n} \text{Im}[F_n(r, z)].$$

В таблице представлены комплексные значения горизонтального волнового числа в зависимости от частотного параметра в окрестности первой частоты продольного резонанса волновода,  $\xi h = \pm \text{Re } \xi h - i \text{Im } \xi h$ .

**Комплексное горизонтальное волновое число и комплексная парциальная мощность для первой вытекающей КВ**

$k_1 h$	$\xi_1 h$	$E_1$
2,7	2,4206 - i0,087	0,1109 - i0,177
2,71	2,4321 - i0,076	0,0878 - i0,162
2,72	2,4436 - i0,038	0,0634 - i0,141
2,73	2,4551 - i0,048	0,0377 - i0,112
2,74	2,4666 - i0,025	0,0104 - i0,062
2,7436	2,4707 - i0,002	0,0001 - i0,006

По мере приближения частотного параметра к резонансному значению уменьшается коэффициент затухания вытекающей волны и увеличивается протяжённость стоячей волны в горизонтальном направлении. Вертикальная структура звукового поля такова, что на глубине волновода укладывается четверть длины волны (для вертикального волнового числа). Горизонтальная структура звукового поля

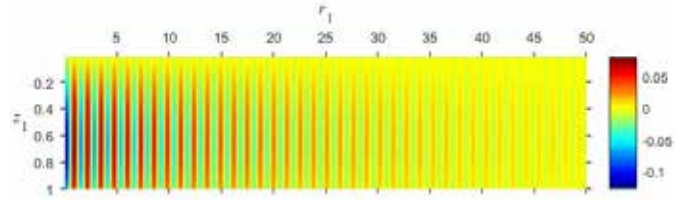


Рис. 3. Пространственная структура угловой компоненты  $H_{\nu n}(r, z) / H_0$  для первой вытекающей КВ;  $k_1 h = 2,74$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 1$

такова, что период стоячей волны в горизонтальном направлении равен половине длины волны (для горизонтального волнового числа). В таблице приведены также оценки парциального комплексного потока мощности  $E_n$ , соответствующего первой вытекающей волне, который является нормирующим множителем в формулах (1), (2). Его роль заключается в том, что вклад данной моды в суммарное звуковое поле тем больше, чем меньше парциальная мощность, приходящаяся на эту нормальную волну. Можно отметить, что вдали от частоты продольного резонанса в потоке комплексной мощности преобладает вещественная составляющая, описывающая излучение вытекающей волны в полупространство. Мнимая составляющая комплексного потока мощности, описывающая формирование стоячей волны в волноводе, становится преобладающей в окрестности частоты продольного резонанса.

На рис. 3 показана пространственная структура нормированной угловой компоненты ротора вектора интенсивности вблизи первой частоты продольного резонанса. Заметно, что горизонтально ориентированные вихревые дорожки сформированы вихрями с противоположным направлением вращения, а их амплитуда убывает экспоненциально быстро с ростом расстояния. На рис. 4 приведены пространственные

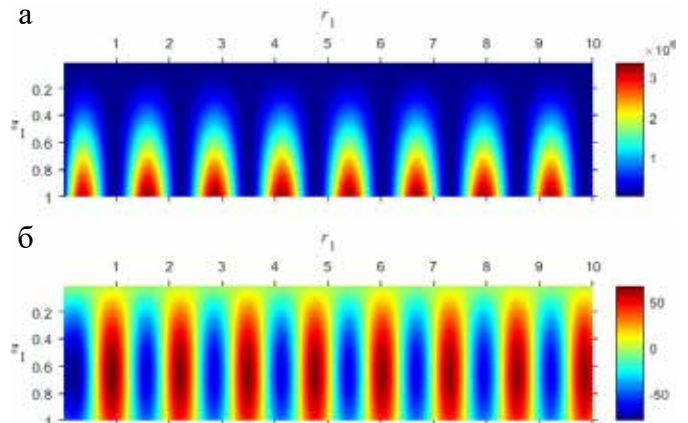


Рис. 4. Пространственная структура квадрата звукового давления  $(p / p_0)^2$  (а) и угловой компоненты  $H_{\nu n}(r, z) / H_0$  (б) для первой вытекающей КВ;  $k_1 h = 2,7436$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 1$

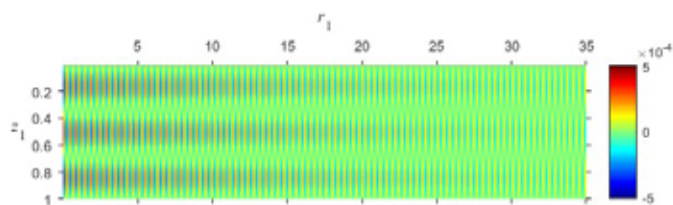


Рис. 5. Пространственная структура угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  для второй вытекающей КВ;  $k_1 h = 9,063$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 2$

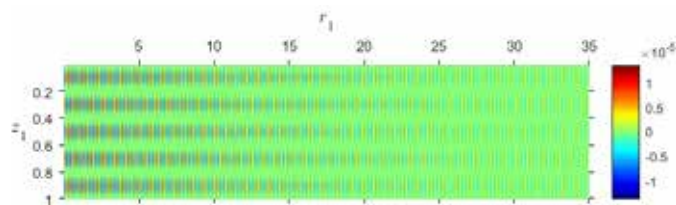


Рис. 7. Пространственная структура угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  для третьей вытекающей КВ:  $k_1 h = 15,19$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 3$

структуры квадрата звукового давления и угловой компоненты вихря для первой вытекающей КВ на первой частоте продольного резонанса. На рис. 5, 6 поясняются аналогичные структуры в окрестности второй частоты продольного резонанса. На рис. 7, 8 поясняются те же структуры в окрестности третьей частоты продольного резонанса.

Следует отметить жёсткую связь узловых точек в пространственной структуре поля звукового давления и седловых точек в пространственной структуре угловой компоненты вихря, названных в работе [3] дислокациями фазового фронта. Узловые точки соответствуют нулям звукового давления, седловые точки – нулям вещественной составляющей вектора интенсивности. Мелкомасштабные вихревые структуры оказываются знакопеременными в обоих направлениях с периодом  $\lambda_r / 2$  в горизонтальном направлении,  $\lambda_r = \lambda / \cos \beta$  ( $\beta$  – угол скольжения,  $\lambda$  – длина волны в направлении распространения), а характерный размер вихря составляет  $\lambda_r / 4$  в горизонтальном направлении и  $\lambda_b / 4$ , ( $\lambda_b = \lambda / \sin \beta$ ) в вертикальном направлении.

Однако дислокационная структура вихревых полей, соответствующих комбинационным волнам с вещественными волновыми числами, поясняемых рис. 1, и вихревых полей, соответствующих ком-

бинационным волнам с комплексными волновыми числами, поясняемых рис. 3–8, отличаются принципиально. Для пояснения этих отличий рассмотрим более подробно дислокационную структуру вихревого поля, соответствующего третьей КВ с вещественными волновыми числами, которая показана на рис. 1, в. Наиболее близкой к этой структуре, в некотором смысле, является дислокационная структура вихревого поля, соответствующая окрестности третьего продольного резонанса, которая представлена на рис. 8, б. Эти две структуры, приведённые к виду, удобному для сравнения, приведены на рис. 9.

Синий цвет на рисунках соответствует вихрям, которые вращаются против часовой стрелки (условно говоря, Л-вихри). Красный цвет соответствует вихрям, которые вращаются по часовой стрелке (условно говоря, П-вихри). Рассмотрим более подробно пространственную структуру вихревого поля, представленную на рис. 9, а. Соответствующая ей дислокационная структура поясняется рис. 10. Здесь под дислокационной структурой вихревого поля мы понимаем геометрию расположения узловых и седловых точек, а также пространственную структуру вихревой составляющей вектора интенсивности, которая ей соответствует, но не существует независимо от потенциальной составляющей вектора интенсив-

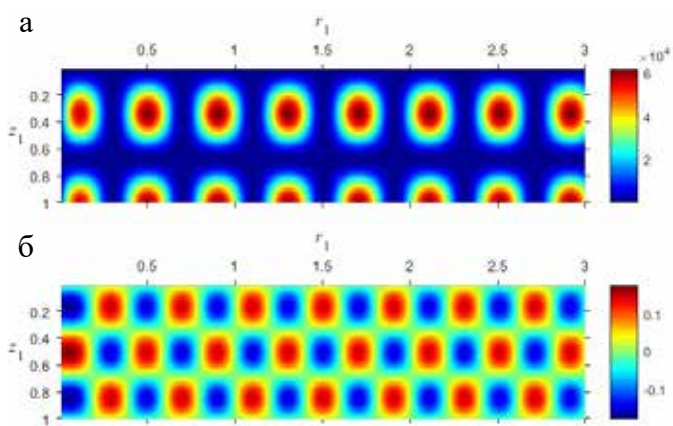


Рис. 6. Пространственная структура квадрата звукового давления  $(p / p_0)^2$  (а) и угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  (б) для второй вытекающей КВ;  $k_1 h = 9,0669$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 2$

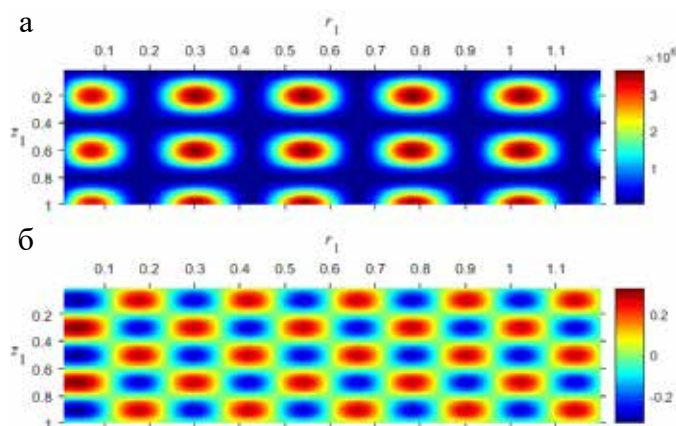


Рис. 8. Пространственная структура квадрата звукового давления  $(p / p_0)^2$  (а) и угловой компоненты  $H_{\psi n}(r, z) / H_0$  (б) для третьей вытекающей КВ;  $k_1 h = 15,1995$ ;  $z_{01} = 0,5$ ;  $m = 3$

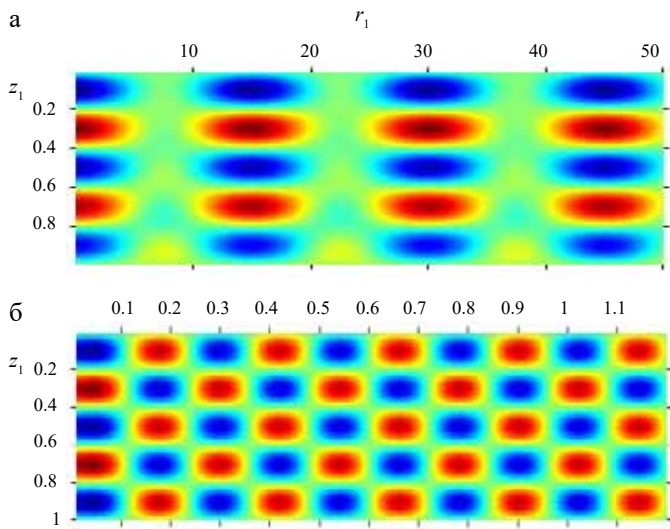


Рис. 9. Пространственные структуры вихревых полей: а — для третьей КВ с вещественными волновыми числами, б — в окрестности третьего продольного резонанса, образованного КВ с комплексными волновыми числами

ности. При построении дислокационной структуры вихревого поля, которое составляет только часть суммарного звукового поля, учтено, что в центре вихря формируется либо минимум, либо узел звукового давления, а на стыке двух одноимённых вихрей Л-типа или П-типа на горизонтально ориентированных вихревых дорожках формируется либо минимум, либо седло вектора интенсивности. Пространственные структуры, соответствующие горизонтально ориентированным вихревым цепочкам, состоящие из П-вихрей, отмечены на рисунке штриховкой.

Рис. 11, а, б поясняют дислокационную структуру чисто вихревого поля в окрестности частоты третьего продольного резонанса, которое не содержит потенциальной составляющей. В этом случае вихревые це-

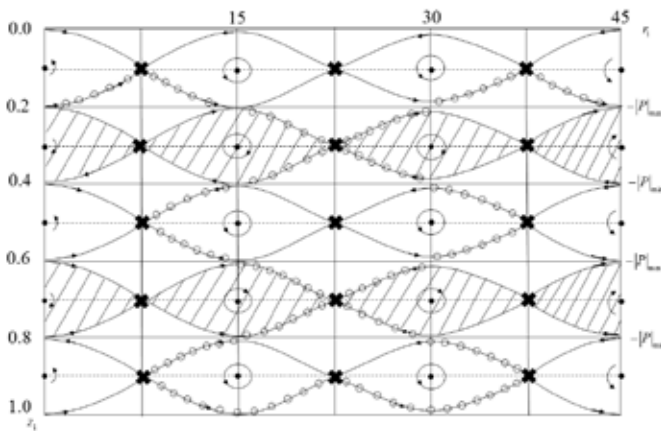


Рис. 10. Дислокационная структура вихревого поля для третьей КВ с вещественными волновыми числами

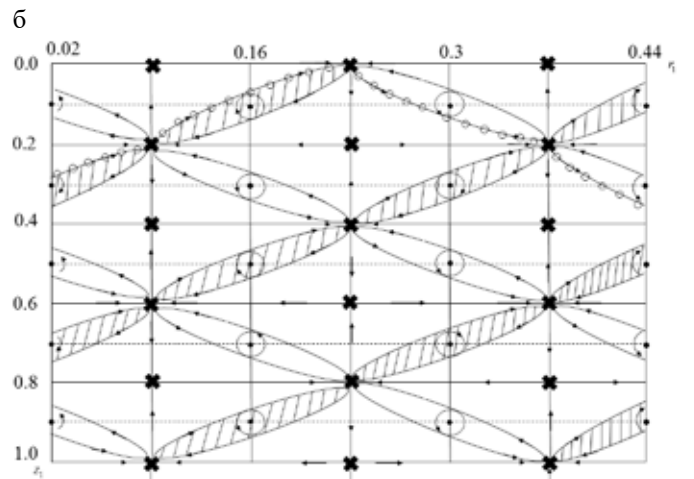
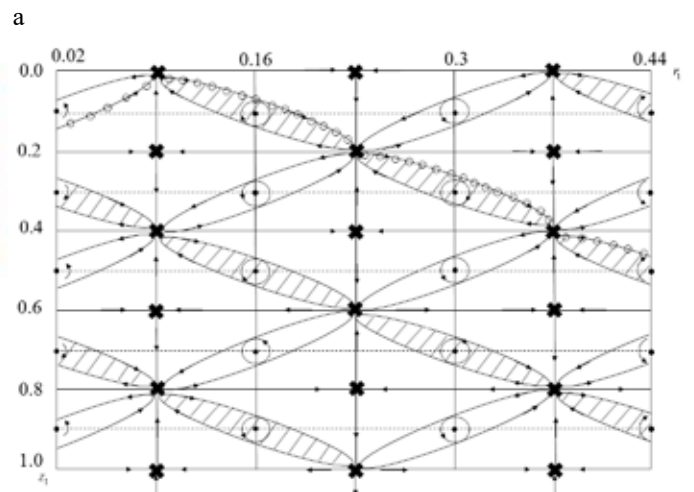


Рис. 11. Дислокационная структура вихревого поля в окрестности третьего продольного резонанса

почки, состоящие либо из Л-вихрей, либо из П-вихрей, имеют диагональную ориентацию. На стыке одноимённых Л-вихрей или П-вихрей формируются седловые точки, а центры вихрей можно идентифицировать с узлами звукового давления. Рисунки 11, а и 11, б отличаются зеркальной относительно горизонта ориентацией вихревых цепочек, состоящих либо из Л-вихрей, либо из П-вихрей.

Можно отметить, что для таких структур характерна взаимная трансформация вихревых цепочек, состоящих, например, из вихрей Л-типа, в вихревые цепочки, состоящие из вихрей П-типа, и наоборот, при отражении от границ волновода. Можно также отметить, что в соответствии с модельным описанием в терминах нормальных волн горизонтальная и вертикальная компоненты вектора интенсивности в вихревом поле тождественно равны нулю. Однако в рамках лучевых представлений в вихревом поле можно выделить лучевые траектории, для которых вертикальная и горизонтальная компоненты вектора интенсивности отличны от нуля (в локальном смысле),



но равны нулю только в среднем. Такие траектории отмечены на рис. 10, 11 точками. В качестве примера для сравнения можно назвать работу [6], в которой выполнен детальный анализ дислокационной структуры вихревого поля, сформированного парой мод идеального волновода с жёсткой нижней и мягкой верхней границами. Наиболее подробно рассмотрена дислокационная структура вихревого поля, сформированного 3-й и 4-й модами в поле донного источника. Дислокационная структура представлена двумя подрешётками, каждая из которых состоит либо из вихрей Л-типа, либо из вихрей П-типа. Решётки сдвинуты друг относительно друга на половину периода интерференции по горизонтальной координате и на половину периода интерференции по вертикальной координате. Следует отметить, что дислокационная структура, определённая в суммарном звуковом поле [6], может отличаться от дислокационной структуры чисто вихревого поля, которая поясняется рис. 10, 11. Для выяснения этих отличий обратимся к работе [6]. В этой работе нули звукового давления в случае интерференционного взаимодействия пары нормальных волн, захваченных волноводом, определяются нулями суммарной функции поперечного сечения, в определённых сечениях волновода:

$$\begin{aligned} & \varphi_n(z_0) \sin(\gamma_n z) + \varphi_m(z_0) \sin(\gamma_m z) = \\ & = [\varphi_n(z_0) + \varphi_m(z_0)] \sin\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2} z\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma_n - \gamma_m}{2} z\right) + \\ & + [\varphi_n(z_0) - \varphi_m(z_0)] \cos\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2} z\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma_n - \gamma_m}{2} z\right) = 0, \end{aligned}$$

где  $\varphi_n(z_0)$ ,  $\varphi_m(z_0)$  – коэффициенты возбуждения пары нормальных волн,  $\gamma_n$ ,  $\gamma_m$  – вертикальные волновые числа. В случае интерференционного взаимодействия 3-й и 4-й нормальных волн, рассмотренного в работе [6], нули звукового давления (узловые точки) формируются в окрестности точек, определяемых уравнениями:

$$\gamma_n = \frac{5\pi}{h}, \quad \gamma_m = \frac{7\pi}{h}, \quad \varphi_n(h) = 1, \quad \varphi_m(h) = -1,$$

$$\begin{aligned} \cos(\xi_n - \xi_m)r = 1, \quad \cos\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\right)z_{01} = 0, \\ z_{01} = \frac{z_0}{h} = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \cos(\xi_n - \xi_m)r = -1, \quad \sin\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\right)z_{01} = 0, \\ z_{01} = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\xi_n, \xi_m$  – горизонтальные волновые числа пары интерферирующих волн.

Координаты узловых точек сдвинуты относительно семейства (4), (5) в вертикальном направлении на малую величину. Для ряда (4) поправки определяются выражением:

$$\Delta z_{01} = \frac{\delta}{6\pi} \operatorname{ctg} z_{01}, \quad \delta = \frac{\gamma_m^2 - \gamma_n^2}{2(k_1 h)^2}, \quad \delta \ll 1. \quad (6)$$

Для ряда (5) поправки определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta z_{01} = \frac{\delta}{6\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} z_{01}\right), \quad z_{01} = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \\ \Delta z_{01} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\delta}{3}}, \quad z_{01} = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Координаты седловых точек сдвинуты относительно семейства (4), (5) на величину порядка  $\delta^2/8$ , которой в случае двухмодовой интерференции, рассмотренной в работе [6], можно пренебречь. В результате в окрестности каждой пары «седло – узел» формируется локальный вихрь, в структуре которого обязательно присутствует «обратный» поток мощности на интервале седло – узел. Будем понимать под размером локального вихря удвоенное расстояние между седлом и узлом. Тогда в интерференционном поле 3 и 4 нормальных волн работы [6] максимальный размер локального вихря в сечениях (4) реализуется для горизонта  $z_{01} = 1/6$  и составляет примерно  $0,06\lambda$ . В сечениях (5) максимальный размер реализуется для горизонта  $z_{01} = 1$  и составляет величину  $\lambda/\pi$ , которую можно считать верхним пределом. Размер локальных вихрей по оценкам работ [16, 17] составляет (0,1–0,2)  $\lambda$ . Однако диапазон изменения модельной оценки этого размера, приведённой выше для частного случая, рассмотренного в работе [6], оказался более широким, зависящим от координат самого локального вихря в дислокационной структуре. Дислокационная структура суммарного звукового поля в этом случае соответствует рис. 1 работы [6]. Дислокационная структура чисто вихревого поля отличается от этой структуры геометрией расположения седловых точек и подобна ей геометрией расположения узловых точек. Геометрия расположения седловых точек определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \cos(\xi_n - \xi_m)r = 1, \\ (\gamma_n \cos \gamma_n z - \gamma_m \cos \gamma_m z) \cdot \cos\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2} z\right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$



$$\cos(\xi_n - \xi_m)r = -1,$$

$$(\gamma_n \cos \gamma_n z + \gamma_m \cos \gamma_m z) \cdot \sin\left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}z\right) = 0 \quad (9)$$

Решение уравнений (8), (9) (в некотором приближении) определяется совместным выполнением условий (4), (5) в критических сечениях волновода

$$\cos(\xi_n - \xi_m)r = \pm 1, \quad z_{01} = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1. \quad (10)$$

В решётке (10) горизонтально ориентированные вихревые цепочки состоят из вихрей одного знака, Л-типа или П-типа, а смена направления вращения вихрей происходит в вертикальном направлении, т.е. в направлении формирования стоячей волны в каждом критическом сечении. Иначе говоря, процесс формирования дислокационной структуры в поле вихревой составляющей вектора интенсивности в рассматриваемом случае волновода с идеальными границами и волновода Пекериса аналогичен и не зависит от выбора пары ближайших нормальных волн. Однако сама дислокационная структура в поле вихревого вектора отличается от дислокационной структуры, определённой в суммарном звуковом поле, которая формируется суммарным вектором интенсивности с потенциальной и вихревой составляющими. Это отличие касается геометрии расположения седловых точек, а точнее говоря, присутствием набора седловых точек, в окрестности которых по какой-то причине замкнутые вихревые структуры типа «седло — узел» (локальные вихри) с характерными «обратными» потоками мощности не формируются. Для выяснения этого вопроса, который касается самого механизма формирования (или не формирования) таких локальных вихрей, обратимся к рис. 12, на котором представлены обе дислокационные структуры: дислокационная решётка (10) и дислокационная решётка, изображённая на рис. 1 работы [6].

Как отмечалось выше, вихревое поле, поле звукового давления и поле горизонтальной компоненты вектора интенсивности жёстко коррелированы. Крупномасштабные вихревые структуры, представленные горизонтально ориентированными вихревыми цепочками Л-типа или П-типа, формируют в пространстве между ними горизонтальные потоки мощности, которые либо усиливают поток мощности (и звуковое давление) в поле потенциальной составляющей вектора интенсивности, либо ослабляют его (и звуковое давление). Хорошо видно, что локальные вихри формируются только в коридорах, где потоки мощности, формируемые вихревой и потенциальной

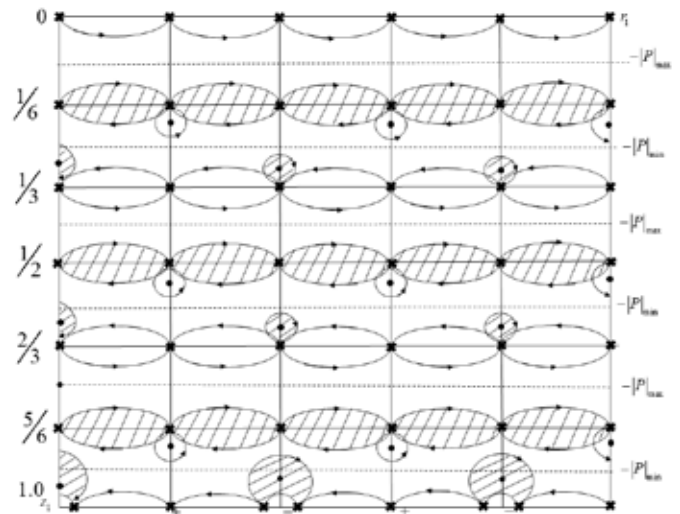


Рис. 12. Дислокационные структуры в вихревом поле и в суммарном звуковом поле, сформированном 3-й и 4-й модами волновода с идеальными границами

составляющими вектора интенсивности, являются встречными, а звуковое поле приобретает характер стоячей волны в горизонтальном направлении. Только в этом случае возможны локальная компенсация горизонтальной компоненты вектора интенсивности и формирование узловых точек в суммарном поле звукового давления, а также локальная компенсация вектора интенсивности и формирование седловых точек в суммарном поле вектора интенсивности в локально близких точках звукового поля. Именно эти процессы локальной компенсации приводят к формированию локальной пары «седло — узел» и локально вихря в окрестности этой пары.

Сами локальные вихри в этом коридоре оказываются знакопеременными в горизонтальном направлении, как это показано на рис. 12, что характерно для структур типа стоячей волны, а потоки мощности в интервале «седло — узел» оказываются «обратными». Важно отметить, что вихревые поля вовсе не сводятся только к локальным вихрям в окрестности сопряжённой пары «седло — узел». Вихревые поля, образующие периодические структуры, представленные на рис. 1, рис. 4–8, составляют важную часть суммарного звукового поля со своими зонами максимальных и минимальных значений. Компоненты ротора вектора интенсивности входят в число 16 информативных параметров, полностью описывающих скалярно-векторную структуру звукового поля, и могут использоваться для повышения помехоустойчивости приёмных систем на основе комбинированных приёмников, как это реализовано в работах [13, 21]. Кроме того, на частотах, меньших частоты первого продольного резонанса, мелкомасштабные вихревые

структуры становятся доминирующей составляющей звукового поля, а их роль в проблеме обнаружения малошумных источников существенно повышается. В научном плане локальные вихри, безусловно, представляют определённый интерес, однако в практическом плане они представляют скорее неизбежную помеху при разработке алгоритмов обнаружения и пеленгования шумящих объектов. С другой стороны, по мнению авторов работы [22], локальные вихри могут оказаться полезными при определении параметров морского дна. Можно также отметить, что «обратные» потоки мощности в составе мелкомасштабных вихревых структур уверенно регистрируются в векторных каналах комбинированного приёмника [13, 17] в условиях мелкого моря и инфразвукового диапазона частот, подтверждая тем самым предпочтительность обобщённого описания звукового поля в несамосопряжённой модельной постановке.

### Заключение

Представлены результаты модельного исследования вихревых структур в мелком море в инфразвуковом диапазоне частот в рамках обобщённого решения граничной задачи Пекериса.

Выделены три типа вихревых структур. К первому типу относятся горизонтально ориентированные крупномасштабные вихревые структуры (зоны завихрённости по терминологии работ [16, 17]), сформированные интерференцией КВ вещественного спектра волновых чисел. В крупномасштабных вихревых структурах направление вращения вихрей остаётся неизменным в горизонтальном направлении (в направлении переноса потока мощности) и знакопеременным в вертикальном направлении (в направлении формирования стоячей волны). Ко второму типу относятся мелкомасштабные вихревые структуры, сформированные вытекающими КВ комплексного спектра волновых чисел в структурах типа стоячих волн, знакопеременные в обоих направлениях. К третьему типу относятся локальные вихри в составе крупномасштабных вихревых структур, представленные сопряжённой парой «седло — узел».

Сами крупномасштабные вихревые структуры формируют протяжённую зону завихрённости около локального вихря. Именно эти локальные вихри ока-

зались предметом исследований, сначала теоретических в работах [1–6], а затем экспериментальных в работах [14–17]. Размер таких вихрей изменяется в широких пределах, но ограничен сверху величиной  $\lambda / \pi$ . Определена дислокационная структура вихревых полей, отмечены её характерные особенности в мелкомасштабных и крупномасштабных вихревых полях.

Приведено сопоставление дислокационных структур, сформированных в вихревом поле, с ранее известными результатами анализа дислокационных структур, определённых в суммарном звуковом поле, на примере волновода с идеальными границами. Определён механизм формирования локальных вихрей, основанный на локальной компенсации локальных потоков мощности в вихревой и потенциальной составляющих вектора интенсивности.

Отмечено, что локальные вихри и «обратные» потоки мощности в их составе являются скорее эксклюзивным явлением, а их экспериментальная регистрация в зонах глубоких интерференционных минимумов звукового давления требует достаточно высокого отношения сигнал/помеха, специальных средств и технологии фазовых измерений, таких, например, какие описаны достаточно подробно в работах [16, 17]. В то же время «обратные» потоки мощности в составе мелкомасштабных вихревых структур являются правилом, а не исключением, и уверенно регистрируются экспериментально в векторных каналах комбинированного приёмника на частотах, меньших первой частоты продольного резонанса, или в окрестности резонансных частот [12, 13, 17]. Важно также отметить, что мелкомасштабные вихревые структуры представляют определённый практический интерес в проблеме повышения помехоустойчивости приёмных систем, оснащённых комбинированными приёмниками, на частотах, меньших первой частоты продольного резонанса, где они становятся преобладающей составляющей звукового поля [13, 21].

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы ИПМТ ДВО РАН: «Исследование и разработка принципов создания многофункциональных робототехнических комплексов для изучения и освоения Мирового океана» (Рег. номер 121030400088-1).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А.Н., Иванников А.Н., Кравченко Д.И., Павлов В.И. Особенности тонкой энергетической структуры звукового поля // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 4. С. 634–638.
2. Жуков А.Н., Иванников А.Н., Павлов В.И. Об идентификации мультипольных источников звука // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 3. С. 447–453.

3. Nye J.F., Berry M.V. Dislocations in wave trains // Proc. of the Royal Society. 1974. Series A. P. 165–190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
4. Журавлёв В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. Потоки энергии в окрестности дислокаций фазового фронта // ЖЭТФ. 1993. Т. 104, № 5. С. 3769–3783.
5. Журавлёв В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. Дислокации фазового фронта в океаническом волноводе и их проявление в акустических измерениях // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 2. С. 260–265.
6. Елисеевнин В.А., Тужилкин Ю.И. Поток акустической мощности в волноводе // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 6. С. 781–788.
7. Касаткин Б.А., Касаткин С.Б. Скалярно-векторная структура и кинематические характеристики звукового поля в инфразвуковом диапазоне частот // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2021. Т. 14, № 3. С. 71–85.
8. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Корректная постановка граничных задач в акустике слоистых сред. М.: Наука, 2009. 406 с.
9. Физическая акустика. Т.1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А / под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. С. 140–203.
10. Гордиенко В.А., Гордиенко В.Л., Захаров Л.Н., Ильичёв В.И. Особенности распространения в мелкой воде сигналов, возбуждаемых источником, расположенном в воздухе // Докл. АН СССР. 1993. Т. 333, № 4. С. 503–506.
11. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Резонансные явления в нерегулярных акустических волноводах типа берегового клина // ДАН. 2010. Т. 436, № 4. С. 545–548.
12. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б. Резонансные явления в клиновидном волноводе в мелком море в инфразвуковом диапазоне частот // Подводные исследования и робототехника. 2022. № 4 (42). С. 71–83.
13. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б. Экспериментальное исследование звуковых полей инфразвукового диапазона в береговом клине // Подводные исследования и робототехника. 2023. № 3 (45). С. 83–96.
14. Shchurov V.A. Peculiarities of real shallow sea wave-guide vortex structure // Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 145, No. 1. P. 525–530.
15. Щуров В.А., Кулешов В.П., Черкасов А.В. Вихревые свойства вектора акустической интенсивности в мелком море // Акуст. журн. 2011. Т. 57, № 6. С. 837–843.
16. Щуров В.А. Векторная акустика океана. Владивосток: Дальнаука, 2003. 308 с.
17. Щуров В.А. Движение акустической энергии в океане. Владивосток: ТОИ ДВО РАН, 2019. 204 с.
18. Щуров В.А. Фазовый механизм устойчивости вихря вектора акустической интенсивности в мелком море // Подводные исследования и робототехника. 2022. № 3(41). С. 79–90.
19. Белов А.И., Кузнецов Г.Н. Пеленгование и подавление векторно-скалярных сигналов в мелком море с учётом их корреляционной и модовой структуры // Акуст. журн. 2016. Т. 62, № 3. С. 308–317.
20. Pekeris C.L. Theory of propagation of explosive sound in shallow water // Geol. Soc. Am. Mem. 1948. No. 2. P. 48–156
21. Касаткин Б.А., Касаткин С.Б. Экспериментальная оценка помехоустойчивости комбинированного приёмника в инфразвуковом диапазоне частот // Подводные исследования и робототехника. 2019. № 1(27). С. 38–47.
22. Лисютин В.А., Ластовенко О.Р. Классификация особых точек и пространственная структура поля потока мощности в гидроакустических волноводах // Электронный научный журнал Инженерный вестник Дона. 2023. № 2.

## Об авторах

**КАСАТКИН Борис Анатольевич**, г. н. с., д. ф.-м. н., профессор  
Институт проблем морских технологий им. акад. М.Д. Агеева  
ДВО РАН

Адрес: 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 5а

**Область научных интересов:** теоретическая и прикладная гидроакустика, распространение звуковых волн в слоистых волноводах.

Тел.: (423) 243-25-78. E-mail: kasatkas@marine.febras.ru  
<http://orcid.org/0000-0001-7392-3672>

**ЗЛОБИНА Надежда Владимировна**, г. н. с., д. т. н.  
Институт проблем морских технологий им. акад. М.Д. Агеева  
ДВО РАН

Адрес: 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 5а

**Область научных интересов:** акустика слоистых сред, гидроакустика, обработка сигналов.

Тел.: (423) 243-25-78. E-mail: zlobina@marine.febras.ru  
<http://orcid.org/0000-0003-3314-2163>

**КАСАТКИН Сергей Борисович**, в. н. с., к. ф.-м. н.  
Институт проблем морских технологий им. акад. М.Д. Агеева  
ДВО РАН

Адрес: 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 5а

**Область научных интересов:** гидроакустика, обработка сигналов, шумовые поля, гибридные приемные системы, неоднородные обобщенные волны.

Тел.: (423) 243-25-78. E-mail: bigcezar@mail.ru  
<http://orcid.org/0000-0002-0945-8355>



# STRUCTURE OF VORTEX FIELDS IN PEKERIS WAVEGUIDE TAKEN INTO ACCOUNT OF DISLOCATIONS

**B.A.Kasatkin**, **N.V. Zlobina**, **S.B. Kasatkin**

Vortex fields are the most complex and least studied objects in the acoustics of layered media. They significantly complicate the structure of the sound field due to the appearance of nodal and saddle points in it, in the vicinity of which the concept of the phase of the sound wave becomes uncertain. Therefore, such special points of the sound field are usually called phase front dislocations. In turn, the dislocation structure of the vortex field is most complex in waveguides, which play an extremely important role in theoretical and applied hydroacoustics. In this work, the vortex structure of the sound field and the corresponding dislocation structure of the vortex field are analyzed using the example of a Pekeris waveguide, the sound field in which is constructed within the framework of a non-self-adjoint model formulation of the corresponding boundary value problem.

**Keywords:** non-self-adjoint model formulation, generalized solution, intensity vector rotor, nodal and saddle points, "reverse" power flows, combination waves.

## References

1. Zhukov A.N., Ivannikov A.N., Kravchenko D.I., Pavlov V.I. Features of the fine energy structure of the sound field. *Acoustic magazine* 1989. Vol. 35, No. 4. P. 634-638.
2. Zhukov A.N., Ivannikov A.N., Pavlov V.I. On the identification of multipole sound sources. *Acoustic magazine* 1990. Vol. 36, No. 3. P. 447-453.
3. Nye J. F. and Berry M. V. Dislocations in wave trains. 1974. *Proc. of the Royal Society. A.* P. 165–190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
4. Zhuravlev V.A., Kobozev I.K., Kravtsov Yu.A. Detecting dislocations by measuring the energy flux of an acoustic field. *JETP*. 1993. Vol. 104, No. 5. P. 808-814.
5. Zhuravlev V.A., Kobozev I.K., Kravtsov Yu.A. Dislocations of the phase front in an oceanic waveguide and their manifestation in acoustic measurements. *Acoustic magazine* 1989. Vol. 35, No. 2. P. 260-265.
6. Eliseevnin V.A., Tuzhilkin Yu.I. Acoustic power flux in a waveguide // *Acoustic magazine*. 2001. Vol. 47, No. 6. P. 781-788.
7. Kasatkin B.A., Kasatkin S.B. Scalar-vector structure and kinematic characteristics of the sound field in the infrasound frequency range. *Fundamental and applied hydrophysics*. 2021. Vol. 14, No. 3. P.71-85.
8. Kasatkin, B.A. Zlobina, N.V. Correct statement of boundary problems in acoustics of layered media. M.: Nauka, 2009. 496 p.
9. *Physical acoustics. Vol.1. Methods and devices of ultrasound studies. Part A.* Edited by W. Mason. M.: Mir Publishing House, 1966. P. 140-203.
10. Gordienko V.A., Gordienko E.L., Zakharov L.N., Ilyichev V.I. Peculiarities of distribution of signals in water excited by the source in the air. *Dokl. Akad. nauk USSR*. 1993. Vol. 333, No. 4. P. 503-506.
11. Kasatkin B.A., Zlobina N.V. Resonant Phenomena in Irregular Acoustic Waveguides of the Coastal Wedge Type. *Doklady Earth Science*. 2011. Vol. 436. Pt. 2. P. 249-252.
12. Kasatkin B.A., Zlobina N.V. Kasatkin S.B. Resonance phenomena in a wedge-shaped waveguide in a shallow sea in the infrasonic frequency range. *Underwater research and robotics*. 2022. No. 4 (42). P. 71-83.
13. Kasatkin B.A., Zlobina N.V. Kasatkin S.B. Experimental study of sound fields in the infrasound range in a coastal wedge. *Underwater research and robotics*. 2023. No. 3(45). P. 83-96.
14. Shchurov V.A. Peculiarities of real shallow sea wave-guide vortex structure. *Acoust. Soc. Am.* 2019. Vol. 145, No. 1. P. 525-530.
15. Shchurov V.A., Kuleshov V.P., Cherkasov A.V. Vortexes of Acoustic Intensity in Shallow Sea. *Acoustic magazine*. 2011. Vol. 57, No. 6. P. 837-843.
16. Shchurov V.A. *Vector acoustics of the ocean*. Vladivostok: Dalnauka, 2003. 308 p.
17. Shchurov V.A. Movement of acoustic energy in the ocean. Vladivostok: TOI FEB RAS, 2019. 204 p.
18. Shchurov V.A. Phase mechanism of stability of the vortex of the acoustic intensity vector in a shallow sea of frequencies // *Underwater research and robotics*. 2022. No. 3(41). P. 79-90.
19. Belov A.I., Kuznetsov G.N. Direction finding and suppression of vector-scalar sound signals in shallow water taking into account their correlation and mode structure. *Acoustical Physics*. 2016. Vol. 62, No. 3. P. 319-327.
20. Pekeris C.L. Theory of propagation of explosive sound in shallow water. *Geol. Soc. Am. Mem.* 1948. No. 2. P. 48-156.
21. Kasatkin B.A., Kasatkin S.B. Experimental assessment of the noise immunity of a combined receiver in the infrasound frequency range. *Underwater research and robotics*. 2019. No. 1(27). P. 38-47.
22. Lisutin V.A., Lastovenko O.R. Classification of singular points and spatial structure of the power flow field in hydroacoustic waveguides. *Electronic scientific journal Engineering Bulletin of the Don*. 2023. No. 2.

## About the authors

**KASATKIN Boris Anatol'evich**, Dr. Sc., prof., Chief Researcher, Institute of Marine Technology Problems FEB RAS, (423) 243-25-78, [kasatkas@marine.febras.ru](mailto:kasatkas@marine.febras.ru), <http://orcid.org/0000-0001-7392-3672>,  
**ZLOBINA Nadezhda Vladimirovna**, Chief Researcher, Dr. Sc., Institute of Marine Technology Problems FEB RAS, (423) 243-25-78, [zlobina@marine.febras.ru](mailto:zlobina@marine.febras.ru), <http://orcid.org/0000-0003-3314-2163>  
**KASATKIN Sergey Borisivich**, Leading Researcher, Ph. D., Institute of Marine Technology Problems FEB RAS, (423) 243-25-78, [bigcezar@mail.ru](mailto:bigcezar@mail.ru), <http://orcid.org/0000-0002-0945-8355>